数理解析研究所講究録 1474 巻 2006 年 169-177

On Liouville Transform for ODEs corresponding to Semilinear Elliptic Equations

岐阜大学・工学部 淺川 秀一 (Hidekazu ASAKAWA)

Faculty of Engineering,
Gifu University

1. 序

次の Sturm-Liouville 型常微分方程式について考える.

$$(\rho(r)u'(r))' + \rho(r)M(r)u(r) + \rho(r)K(r)|u(r)|^{p-1}u(r) = 0, \quad (a < r < b) \tag{E}$$

ここで, $p > 0$, $M(\cdot) \in L^1_{loc}(a,b)$ であり, $\rho(\cdot)$, $K(\cdot) \in C^2(a,b)$ で $r \in (a,b)$ のとき $\rho(r)$, $K(r) > 0$ とする. $\mathbf{R}^N$ の球対称性をもつ領域 Ω 上の半線形楕円型方程式:

$$\nabla \cdot (\alpha(|x|)\nabla u(x)) + \beta(|x|)u(x) + \gamma(|x|)|u(x)|^{p-1}u(x) = 0 \quad x \in \Omega \tag{EP}$$

の球対称解 $u(r) = u(|x|)$ が満たす常微分方程式は, (E) の形の方程式である. 柳田・四ッ谷 [5] は, (E) の形の方程式を変数変換によって, $(0,1)$ 区間上の方程式

$$w''(t) + k(t)|w(t)|^{p-1}w(t) = 0 \qquad (0 < t < 1) \tag{YE}$$

に変換し, 統一的に扱うことを提案した ([4]も参照). その変数変換は, Sturm-Liouville 型線形常微分方程式の主解の理論 (Hartman [3], Niessen-Zettl [2]) を用いて構成されるものであり, [5] よりも少し一般の形で以下に述べておく. (E) の線形部分の方程式 $(\rho(r)u'(r))' + \rho(r)M(r)u(r) = 0$ $(a < r < b)$ が, 次を満たす正値解 $\phi(\cdot)$ をもつとする.

$$\int_a^d \frac{1}{\rho(r)\phi(r)^2}\,dr = +\infty, \qquad \int_d^b \frac{1}{\rho(r)\phi(r)^2}\,dr < +\infty, \qquad (a < d < b).$$

$\phi(\cdot)$ は, $r = a$ における主解と呼ばれるものであり, これを用いて,

$$t := \frac{\phi(r)}{\tilde{\phi}(r)}, \quad w(t) := \frac{u(r)}{\tilde{\phi}(r)} \qquad \begin{cases} \tilde{\phi}(r) := \phi(r) + \hat{\phi}(r) \\ \hat{\phi}(r) := \phi(r) \displaystyle\int_r^b \frac{1}{\rho(y)\phi(y)^2}\,dy \end{cases}$$

と置けば，方程式 (E) は方程式 (YE) に変換される．ただし，

$$k(t) := \rho(r)^2 \tilde{\phi}(r)^{p+3} K(r).$$

上記の変数変換を用いた解析を行うときの問題点の一つは，線形部分の方程式の正値解 $\phi(\cdot)$ の具体形（厳密解，級数解，積分表示等）が求められなければならいことである．縦んば，級数解や積分表示が分かったとしても，正値解の存在等を示すための解析は可成り煩雑な計算になってしまうことが予想される．また，楕円型方程式 (EP) の典型例として，$N \geq 3$, $p := (N+2)/(N-2)$ とし，

$$\Delta u(x) + |u(x)|^{p-1} u(x) = 0 \qquad x \in \Omega \tag{CE}$$

を考えると，領域 が (I) $\Omega = \mathbf{R}^N$, (II) $\Omega = \mathbf{B}^N := \{x \in \mathbf{R}^N \mid |x| < 1\}$, (III) $\Omega = \mathbf{D}^N := \{x \in \mathbf{R}^N \mid 1 < |x| < 2\}$ のそれぞれの場合で，正値解の存在等については，球対称解だけに限っても著しく状況が違うことはよく知られるところである．したがって，方程式 (E) を統一的な一つの形の方程式 (YE) に書き下すよりも，方程式 (E) の型を分類した方が得策であろうと思われる．この小論は，線形固有値問題の場合にはよく知られている Liouville 変換（例えば，[6] を参照）を方程式 (E) 用に焼き直した変数変換を用いて，方程式 (E) を $(0,1)$ 区間上の方程式

$$w''(t) + m(t)w(t) + k(t)w(t)^p = 0 \qquad (0 < t < 1) \tag{AE}$$

に変換することによって，方程式 (E) を上記 (I)-(III) に対応する三つの型に分類できることの報告である．

楕円型方程式 (CE) の球対称解 $u(r) = u(|x|)$ が満たす常微分方程式は，

$$(r^{N-1}u'(r))' + r^{N-1}|u(r)|^{p-1}u(r) = 0, \qquad (a < r < b)$$

であり，a, b は Ω によって，(I) $a = 0$, $b = +\infty$; (II) $a = 0$, $b = 1$; (III) $a = 1$, $b = 2$ となる．$\eta > 0$ とすると，それぞれの場合に下記の変数変換によって，(AE) の形の方程式に変換される．

(I) $\Omega = \mathbf{R}^N$ $(a = 0, b = +\infty)$ の場合;

$$\begin{aligned} t &:= \frac{r^\eta}{r^\eta + 1} \\ w(t) &:= \frac{\sqrt{\eta}\, r^{(N-2+\eta)/2}}{r^\eta + 1} u(r) \end{aligned} \qquad \left\{ \begin{aligned} m(t) &:= \frac{1 - (N-2)^2/\eta^2}{4[t(1-t)]^2} \\ k(t) &:= \eta^{-(p+3)/2} [t(1-t)]^{-(p+3)/2} \end{aligned} \right.$$

(II) $\Omega = \mathbf{B}^N$ $(a=0,\, b=1$ $)$ の場合;

$$t: = r^\eta \qquad w(t): = \sqrt{\eta} r^{(N-2+\eta)/2} u(r) \qquad \begin{cases} m(t) := \dfrac{1-(N-2)^2/\eta^2}{4t^2} \\ k(t) := \eta^{-(p+3)/2} t^{-(p+3)/2} \end{cases}$$

(III) $\Omega = \mathbf{D}^N$ $(a=1,\, b=2)$ の場合;

$$t: = \frac{\log r}{\log 2} \qquad w(t): = r^{\frac{N-2}{2}} u(r) \qquad \begin{cases} m(t) := -\dfrac{(\log 2)^2 (N-2)^2}{4} \\ k(t) := 1 \end{cases}$$

((I) と (II) の場合の $k(t)$ の係数 $\eta^{-(p+3)/2}$ は，さらに $w(t)$ を定数倍する変換を行えば 1 にできることを注意しておく.）このことから示唆されるのは，適当な変数変換によって，(AE) の形の $(0,1)$ 区間上の方程式に変換したとき，(I) $k(t) = k_0[t(1-t)]^{-\frac{p+3}{2}}$, (II) $k(t) = k_0 t^{-\frac{p+3}{2}}$, (III) $k(t) = k_0$ (k_0 は定数) の何れに変換できるかによって，方程式 (E) を三つの型 (I)-(III) に分類できないか，ということである．それが，実際に可能であることを次節で述べる.

2. Liouville-型の変換

関数 $F(\cdot)$ と $\psi(\cdot)$ を次のように定義する.

$$F(r): = \rho(r)[\rho(r)^2 K(r)]^{-\frac{2}{p+3}} = \rho(r)^{1-\frac{4}{p+3}} K(r)^{-\frac{2}{p+3}},$$
$$\psi(r): = \sqrt{\frac{F(r)}{\rho(r)}} = [\rho(r)^2 K(r)]^{-\frac{1}{p+3}}.$$

このとき，

$$\rho(r)^2 \psi(r)^{p+3} K(r) = 1 \qquad (a < r < b)$$

であり，また，

$$Q_0(r): = -\frac{(\rho(r)\psi'(r))'}{\rho(r)\psi(r)} = \left(\frac{\rho'(r)}{2\rho(r)}\right)^2 + \left(\frac{\rho'(r)}{2\rho(r)}\right)' - \left(\frac{F'(r)}{2F(r)}\right)^2 - \left(\frac{F'(r)}{2F(r)}\right)'$$

である.

さて，$d := (b+a)/2$ とし，

$$A := \int_a^d \frac{1}{F(r)}\, dr \qquad B := \int_d^b \frac{1}{F(r)}\, dr$$

とおこう．次の 4 つに場合が考えられる．

(I) $A = B = +\infty$;

(II) $A = +\infty$ かつ $B < +\infty$;　**(II)$'$** $A < +\infty$ かつ $B = +\infty$;

(III) $A < +\infty$ かつ $B < +\infty$:

この (I), (II) と $(II)'$, (III) が，それぞれ序節に述べた (I) $k(t) = k_0[t(1-t)]^{-\frac{p+3}{2}}$, (II) $k(t) = k_0 t^{-\frac{p+3}{2}}$, (III) $k(t) = k_0$ の型に対応する．すなわち，方程式 (E) は，積分量 A, B によって (I)-(III) の三つの型に定量的に分類される．その変数変換は次のようになる．

Theorem 1. $\eta > 0$, $a < c < b$ とする．

(I) $A = B = +\infty$ のとき．変換:

$$w_\eta(t) := \sqrt{\frac{\eta t(1-t)\rho(r)}{F(r)}}u(r), \qquad t := \frac{\exp\left(\eta \displaystyle\int_c^r \frac{1}{F(r)}\,dr\right)}{\exp\left(\eta \displaystyle\int_c^r \frac{1}{F(r)}\,dr\right) + 1}$$

によって，方程式 *(E)* の解 $u(r)$ は，

$$w_\eta''(t) + m_\eta(t)w_\eta(t) + \eta^{-(p+3)/2}[t(1-t)]^{-(p+3)/2}|w_\eta(t)|^{p-1}w_\eta(t) = 0, \qquad (0 < t < 1)$$

の解 $w_\eta(t)$ と一対一に対応する．ただし，

$$m_\eta(t) := \frac{1 - 4n_\eta(t)}{4[t(1-t)]^2}, \qquad n_\eta(t) := \frac{F(r)^2(Q_0(r) - M(r))}{\eta^2}.$$

(II) $A = +\infty$ かつ $B < +\infty$ のとき．変換:

$$w_\eta(t) := \sqrt{\frac{\eta t\rho(r)}{F(r)}}u(r), \qquad t := \exp\left(-\eta \int_r^b \frac{1}{F(y)}\,dy\right)$$

によって，方程式 *(E)* の解 $u(r)$ は，

$$w_\eta''(t) + m_\eta(t)w_\eta(t) + \eta^{-(p+3)/2}t^{-(p+3)/2}|w_\eta(t)|^{p-1}w_\eta(t) = 0 \qquad (0 < t < 1)$$

の解 $w_\eta(t)$ と一対一に対応する．ただし，

$$m_\eta(t) := \frac{1 - 4n_\eta(t)}{4t^2}, \qquad n_\eta(t) := \frac{F(r)^2(Q_0(r) - M(r))}{\eta^2}.$$

(II)$'$ $A<+\infty$ かつ $B=+\infty$ のとき，変換:

$$w_\eta(t) := \sqrt{\frac{\eta t\rho(r)}{F(r)}}u(r), \qquad t := \exp\left(-\eta\int_a^r \frac{1}{F(y)}\,dy\right)$$

によって，方程式 *(E)* の解 $u(r)$ は,

$$w_\eta''(t) + m_\eta(t)w_\eta(t) + \eta^{-(p+3)/2}t^{-(p+3)/2}|w_\eta(t)|^{p-1}w_\eta(t) = 0 \qquad (0<t<1)$$

の解 $w_\eta(t)$ と一対一に対応する．ただし,

$$m_\eta(t) := \frac{1-4n_\eta(t)}{4t^2}, \qquad n_\eta(t) := \frac{F(r)^2(Q_0(r)-M(r))}{\eta^2}.$$

(III) $A<+\infty$ かつ $B<+\infty$ のとき．変換:

$$w(t) := \gamma^{4/(p-1)}\sqrt{\frac{\rho(r)}{F(r)}}u(r), \qquad t := \int_a^r \frac{1}{\gamma^2 F(y)}\,dy$$

によって，方程式 *(E)* の解 $u(r)$ は,

$$w''(t) + m(t)w(t) + |w(t)|^{p-1}w(t) = 0 \qquad (0<t<1)$$

の解 $w(t)$ と一対一に対応する．ただし,

$$m(t) := \gamma^4 F(r)^2(M(r)-Q_0(r)), \qquad \gamma := \sqrt{\int_a^b \frac{1}{F(y)}\,dy}.$$

上の定理の変換は，すべて，正値関数 $\Psi(r)$ があって,

$$t := \int_a^r \frac{1}{\rho(y)\Psi(y)^2}\,dy \qquad w(t) := \frac{u(r)}{\Psi(r)}$$

という形をしている．また，四つ変換は，線形の固有値問題におけるLiouville-変換と呼ばれる変換との関連が深い．λ をパラメータとする線形の固有値問題：

$$(\rho(r)u'(r))' + \rho(r)M(r)u(r) + \lambda\rho(r)K(r)u(r) = 0 \qquad (a<r<b) \quad \text{(EV)}$$

に対して，次のように定義される変換は Liouville-変換と呼ばれる.

$$v(s) := (\rho(r)^2K(r))^{1/4}u(r), \qquad s = \int_c^r \sqrt{K(y)}\,dy \quad (a<c<b).$$

Liouville-変換により (EV) は

$$v''(s)+\tilde{m}(s)v(s)+\lambda v(s)=0, \qquad (a'<t<b')$$

となる．ただし，

$$\begin{aligned}\tilde{m}(s):&=\frac{M(r)-Q_0(r)}{K(r)},\\ Q_0(r):&=\left(\frac{\rho'(r)}{2\rho(r)}\right)^2+\left(\frac{\rho'(r)}{2\rho(r)}\right)'-\left(\frac{K'(r)}{4K(r)}\right)^2+\left(\frac{K'(r)}{4K(r)}\right)'\end{aligned}$$

であり，

$$a':=-\int_a^c\sqrt{K(y)}\,dy \qquad b':=\int_c^b\sqrt{K(y)}\,dy.$$

上記の Liouville-変換を，半線形の方程式 (E) の場合に焼き直してみると，次のようになる．

Proposition 2. $a\le c\le b$ としよう．ただし，$A=+\infty$ のときは $a<c$, $B=+\infty$ のときは $c<b$ とする．(**a**) このとき，変換：

$$v(s):=\frac{u(r)}{\psi(r)}, \qquad s:=\int_c^r\frac{1}{F(y)}\,dy=\int_c^r\frac{1}{\rho(y)\psi(y)^2}\,dy$$

によって，方程式 *(E)* の解 $u(r)$ は，方程式:

$$v''(s)+\tilde{m}(s)v(s)+|v(s)|^{p-1}v(s)=0, \qquad (a'<s<b')$$

$$\tilde{m}(s):=F(r)^2(M(r)-Q_0(r))$$

の解 $v(s)$ と一対一に対応する．ただし，

$$a':=-\int_a^c\frac{1}{F(y)}\,dy \qquad b':=\int_c^b\frac{1}{F(y)}\,dy.$$

特に，*(I)* $A=+\infty$ かつ $B=+\infty$ のときは，すべての $a<c<b$ なる c に対して，$a'=-\infty$, $b'=+\infty$ であり，*(II)'* $A<+\infty$ かつ $B=+\infty$ のときは，$c=a$ とすれば，$a'=0$, $b'=+\infty$ である．(**b**) このとき，変換：

$$v(s):=\frac{u(r)}{\psi(r)}, \qquad s:=\int_r^c\frac{1}{F(y)}\,dy=\int_r^c\frac{1}{\rho(y)\psi(y)^2}\,dy$$

によって，方程式 *(E)* の解 $u(r)$ は，方程式:

$$v''(s)+\tilde{m}(s)v(s)+|v(s)|^{p-1}v(s)=0, \qquad (a''<s<b'')$$

$$\tilde{m}(s):=F(r)^2(M(r)-Q_0(r))$$

の解 $v(s)$ と一対一に対応する．ただし，

$$a'' := -\int_c^b \frac{1}{F(y)}\,dy \qquad b'' := \int_a^c \frac{1}{F(y)}\,dy.$$

特に，(I) $A=+\infty$ かつ $B=+\infty$ のときは，すべての $a<c<b$ なる c に対して，$a''=-\infty$, $b''=+\infty$ であり，(II) $A=+\infty$ かつ $B<+\infty$ のときは，$c=b$ とすれば，$a''=0$, $b''=+\infty$ である．

上の命題の変換は，方程式 (E) の Liouville-変換と呼ぶべきものである．先に述べた方程式 (E) の $(0,1)$ 区間上の方程式への変換は，Liouville-変換によって得られる方程式を，さらに $(0,1)$ 区間上に変換したものであり，方程式 (E) の Liouville-変換の変形版なのである．

3. 例

$N>2$ とし，次の方程式を考える．

$$(\rho(r)u'(r))' + \rho(r)M(r)u(r) + \rho(r)|u(r)|^{p-1}u(r) = 0, \qquad (0<r<+\infty) \tag{EE}$$

ただし，$\rho(r) := r^{N-1}$, $p>1$, $M(\cdot)\in L^1_{loc}(0,+\infty)$ とする．このとき，

$$\begin{aligned} F(r) &= r^{\sigma+1}, \\ \sigma :&= (N-1)\left(1-\frac{4}{p+3}\right)-1 = \frac{N-2}{p+3}\left(p-\frac{N+2}{N-2}\right). \end{aligned}$$

であり，

$$\begin{aligned} Q_0(r) &= \frac{(N-2)^2-\sigma^2}{4r^2}, \\ F(r)^2(Q_0(r)-M(r)) :&= \frac{(N-2)^2-\sigma^2-4r^2M(r)}{4}r^{2\sigma}. \end{aligned}$$

(I) $\sigma=0$ のとき，すなわち，$p=(N+2)/(N-2)$ のとき．

$A=B=+\infty$ であり，方程式 (EE) の解 $u(r)$ に対して，Theorem 1 の (I) を適用すると

$$w(t) := \frac{\sqrt{\eta}c^{\eta/2}r^{(N-2+\eta)/2}}{r^\eta+c^\eta}u(r), \qquad t := \frac{r^\eta}{r^\eta+c^\eta}$$

$(0<c<+\infty)$ と置けば，$w(t)$ は方程式:

$$w''(t)+m(t)w(t)+\eta^{-(p+3)/2}[t(1-t)]^{-(p+3)/2}|w(t)|^{p-1}w(t)=0, \quad (0<t<1)$$

の解である．ただし，

$$m(t) := \frac{1-4n(t))}{4[t(1-t)]^2}, \qquad n(t) := \frac{(N-2)^2 - 4r^2M(r)}{4\eta^2}.$$

(II) $\sigma > 0$ のとき，すなわち，$p > (N+2)/(N-2)$ のとき．
$A = +\infty$ かつ $B < +\infty$ であり，方程式 (EE) の解 $u(r)$ に対して，Theorem 1 の (II) を適用すると

$$w(t) := \sqrt{\eta}r^{(N-2)/2}\exp\left(\frac{-\eta r^{-\sigma}}{2\sigma}\right)u(r), \qquad t := \exp\left(\frac{-\eta r^{-\sigma}}{\sigma}\right)$$

と置けば，$w(t)$ は方程式:

$$w''(t) + m(t)w(t) + \eta^{-(p+3)/2}t^{-(p+3)/2}|w(t)|^{p-1}w(t) = 0, \quad (0 < t < 1)$$

の解である．ただし，

$$m(t) := \frac{1-4n(t)}{4t^2}, \qquad n(t) := \frac{(N-2)^2 - \sigma^2 - 4r^2M(r)}{4\eta^2}r^{2\sigma}.$$

$(II)'$ $\sigma < 0$ のとき，すなわち，$p < (N+2)/(N-2)$ のとき．
$A < +\infty$ かつ $B = +\infty$ であり，方程式 (EE) の解 $u(r)$ に対して，Theorem 1 の $(II)'$ を適用すると

$$w(t) := \sqrt{\eta}r^{(N-2)/2}\exp\left(\frac{\eta r^{-\sigma}}{2\sigma}\right)u(r), \qquad t := \exp\left(\frac{\eta r^{-\sigma}}{\sigma}\right)$$

と置けば，$w(t)$ は方程式:

$$w''(t) + m(t)w(t) + \eta^{-(p+3)/2}t^{-(p+3)/2}|w(t)|^{p-1}w(t) = 0, \quad (0 < t < 1)$$

の解である．ただし，

$$m(t) := \frac{1-4n(t)}{4t^2}, \qquad n(t) := \frac{(N-2)^2 - \sigma^2 - 4r^2M(r)}{4\eta^2}r^{2\sigma}$$

例えば，$p > (N+2)/(N-2)$ のとき，

$$M(r) := \frac{(N-2)^2 - \sigma^2}{4r^2} - \frac{\eta^2}{4r^{2(\sigma+1)}} + \frac{\lambda\eta^2}{r^{2(\sigma+1)}}\exp\left(-\frac{2\eta}{\sigma}r^{-\sigma}\right)$$

に対して，Theorem 1 の (II) を適用して得られる方程式は，

$$w''(t) + \lambda w(t) + \eta^{-(p+3)/2}t^{-(p+3)/2}w(t)^p = 0, \qquad (0 < t < 1)$$

となる．この方程式は，[1] の処方に従えば，$\pi^2/4 < \lambda < \pi^2$ のときに限って，正値解 $w(\cdot) \in C^1[0,1]$ をもつ．これより，$M(r)$ が殆ど至る所の $r \in (0,+\infty)$ で

$$\begin{aligned}\frac{\pi^2\eta^2}{4r^{2(\sigma+1)}}\exp\left(-\frac{2\eta}{\sigma}r^{-\sigma}\right) \;&<\; M(r) - \frac{(N-2)^2-\sigma^2}{4r^2} + \frac{\eta^2}{4r^{2(\sigma+1)}} \\ &<\; \frac{\pi^2\eta^2}{r^{2(\sigma+1)}}\exp\left(-\frac{2\eta}{\sigma}r^{-\sigma}\right)\end{aligned}$$

を満たすなら，方程式 (EE) は，

$$0 < \int_0^{+\infty} \rho(r)(u'(r)^2 - M(r)u(r)^2)\,dr < +\infty, \qquad \int_0^{+\infty} \rho(r)u(r)^{p+1}\,dr < +\infty$$

である正値解 $u(\cdot)$ を持つことがわかる．

参考文献

[1] H. Brezis and L. Nirenberg; Positive solutions of nonlinear elliptic equations involving critical Sobolev exponents, *Comm. Pure Appl. Math.* **36** (1983), 437–477.

[2] H.-D. Niessen and A. Zettl; Singular Sturm-Liouville problems: The Friedrichs extension and comparison of eigenvalues , *Proc. London Math. Soc.* **64** (1992), 545–578.

[3] P. Hartman; Ordinary Differential Equations, Birkhäuser, Boston, 1982.

[4] Y. Kabeya, E. Yanagida, S. Yotsutani; Canonical forms and structure theorems for radial solutions to semi-linear elliptic problems, *Communication on Pure and Applied Analysis* **1** (2002), 85-102.

[5] E. Yanagida, S. Yotsutani; A unified approach to the structure of radial solutions for semilinear elliptic problems. Recent topics in mathematics moving toward science and engineering. *Japan J. Indust. Appl. Math.* **18** (2001), 503–519.

[6] K. Yosida; Lectures on Differential and Integral Equations, Dover, New York 1991.